Algebraic cycles on toric varieties(トーリック多様体上の代数的サイクル)

氏名・(本籍)	朴(パク)　恵(ヘ)　淑(スク)
学位の種類	博　士(理　学)
学位記番号	理博第1241号
学位授与年月日	平成4年3月27日
学位授与の要件	学位規則第4条第1項該当
研究科専攻	東北大学大学院理学研究科 (博士課程) 数学専攻
学位論文題目	Algebraic cycles on toric varieties (トーリック多様体上の代数的サイクル)
論文審査委員	(主査) 教　授　小田忠雄　　教　授　堀田良之 教　授　西川青季 助教授　石田正典

論　文　目　次

(Full and simplicial fans)

第８節　孤立特異点への応用

(Applications to isolated singularities)

論　文　内　容　要　旨

トーリック多様体の理論は1970年代初頭にデマジュール，マンフォード，小田などによって基礎づけられた。これは代数幾何と凸多面体の幾何とを関連づける理論である。トーリック多様体は扇と呼ばれる有理強凸多面錐からなるある種の有限集合に対応して得られる代数多様体である。この事実によってトーリック多様体の代数幾何学的な性質を扇によって組合せ論的に記述することができる。本論文の目的はこの事実に基づいて，トーリック多様体のいくつかの興味ある代数幾何的対象を組合せ論的に具体的に記述し証明することである。但し，この論文ではトーリック多様体が高々商特異点しか持たない場合，すなわち，対応する扇が単体的の場合に限定することにする。

本論文は大きく二つに分けられる。まず，第1節では本論文全体を通して使用する概念を説明する。その後，Chow 環に関して述べ，後半部では GKZ 分割に関して述べる。以下順を追って各節の内容を述べる。

第2節　Chow 環

代数多様体の Chow 環は代数的サイクルの有理的同値類のなす次数付き環として一般的に定義される。非特異なトーリック多様体の Chow 環はダニロフ(1978年)，ユルキエビッチ(1980年）によって扇の組合せ論を使って完全に表現された。トーリック多様体が高々商特異点しか持たない場合の Chow 環はダニロフ（1978年），フルトン（1989年）によって定義されてはいるが，同変正則写像に関する引き戻し準同形と押し出し準同形に関してはあまり触れていない。本節では，単体的な扇に対してスタンレー・ライズナー環を線形同値関係で割った環として Chow 環を定義する。これは有理数体上の有限次元次数付き代数であり，扇の組合せ論的構造を使ってその性質が完全に書ける。

命題.　Chow 環の次数 k の同次部分加法群は k 次元凸多面錐に対応する元達で生成される有理数体上のベクトル空間である。また，これは石田（1980年）によって定義された扇に対する石田のコホモロジー群の有理数体への係数拡大と同形である。

第3節　Chow 環の間の準同形

一般の代数多様体の場合の Chow 環の間の引き戻し準同形と押し出し準同形はクライマン(1968年)，フルトン（1984年）などによって議論されているが，それらのトーリック版はまだできていないようである。本節では，高々商特異点しか持たないトーリック多様体間の同変正則写像によって誘導される，Chow 環の間の引き戻し準同形と押し出し準同形を代数幾何の方法を用いずに，対応する単体的な扇とその間の扇の写像によって具体的に示した。但し，押し出し準同形の場合には扇の写像が固有的で有限余核を持つ場合に限る。また，これらを用いて引き戻し準同形と押し出し準同形が満たす射影公式も代数幾何の方法によらず扇と扇の写像の

言葉で直接証明した。

定理. (1) 扇の写像はChow環の間の引き戻し準同形を誘導する。これは有理数体Q上の次数付き代数準同形である。

(2) 固有的で有限余核を持つ扇の写像はChow環の間の押し出しQ線形写像を誘導する。

(3) 誘導された引き戻し準同形と押し出し準同形は射影公式を満たす。

第4節 ファイバー空間とChow環

Chow環の間の引き戻し準同形と押し出し準同形の応用としてトーリック多様体上の同変射影空間束と同変ベクトル束の束写像を実際に表現し，それらに対応するChow環を底空間のChow環を用いて記述した。特に同変射影直線束，同変線束の場合は強レフシェッツ定理と関連が深い。これらの証明には石田のコホモロジー群が重要な役割を果たす。

定理. (1) 同変k次元射影空間束のChow環はある（k+1）次多項関係式を満たす元によって底空間のChow環上で生成されるQ代数と同形である。

(2) 同変ベクトル束のChow環は底空間のChow環と同形である。

第5節 Q線形ゲール変換

後半部ではトーリック多様体に関するGKZ分割に関して述べる。それはゲール変換に基づいたものである。ゲール変換は特に小さいピカール数を持つトーリック多様体の研究に重要な役割を果たしている。例えば，クラインシュミット・シュトルムフェルス（1991年）はピカール数が3以下でコンパクトなトーリック多様体は必ず射影的であることをゲール変換を用いて証明している。本論文ではゲール変換をChow環に結び付けて考える。すなわち，階数rの格子Nでの単体的なr次元扇に対してChow環の次数1の同次部分加法群とその有理数体上の生成元との組は格子Nの有理数体への係数拡大と1次元凸多面錐の原始元との組のQ線形ゲール変換になる。この事実からChow環の次数1の同次部分加法群の性質をQ線形ゲール変換を用いて1次元凸多面錐の言葉で記述することができる。

命題. (1) 単体的な扇が完備なら，Chow環の次数1の同次部分加法群の有理数体上の生成元達が張る凸多面錐は強凸である。

(2) 1次元凸多面錐の原始元r個が有理数体上1次独立なら，Chow環の次数1の同次部分加法群の有理数体上の生成元の中で，残りの原始元に対応する生成元は有理数体上1次独立である。また，その逆も成り立つ。

第6節 GKZ分割

ゲルファント・カプラーノフ・ゼレビンスキー（1991年）は射影的トーリック多様体に対応する整凸多面体の正則三角形分割を用いて実アフィン空間のある分割を得た。小田と著者（1991年）は彼らの結果を一般化した上で再構成した。本節ではその結果を高々商特異点しか持たな

いトーリック多様体に適用する。実アフィン空間内の点の格子群を考え，格子群内の原始元からなる有限集合 Ξ を固定する。1 次元凸多面錐が Ξ から作られるような単体的扇のみを考察する。そのような扇の中で，準射影的で，かつ台が Ξ の元によって非負実数全体上で生成されるものと一致するような扇を Ξ に関して認容な扇と呼ぶことにする。Ξ に関して認容な扇，従ってそれに対応するトーリック多様体の分類，及びそれらの間の関係などを GKZ 分割を通して扇の言葉により記述することができる。

定理. Ξ が与えられたとき，Ξ に関して認容で，しかも単体的かつ充満な扇が必ず存在する。また，そのような扇に対応する GKZ 凸多面錐の和集合は凸多面錐になる。

定理. Ξ が与えられたとき，単体的であってしかも Ξ に関して認容な扇は GKZ 分割からすべて構成できる。

第 7 節　単体的かつ充満な扇

Ξ を固定して，単体的かつ充満で，凸な台を持つ扇を考える。そのとき，扇から作られる GKZ 凸多面錐の双対凸多面錐を扇の組合せ論的に具体的に記述することができる。

定理. GKZ 凸多面錐の双対凸多面錐は内部壁に対応するある元達によって非負実数全体上で生成される。特に扇が完備の場合，双対凸多面錐は森凸多面錐と同一視することができる。

上の定理を用いて森理論のトーリック版であるリード（1983年）の結果の一部を GKZ 分割の言葉を使ってより簡単に証明した。

第 8 節　孤立特異点への応用

π を有理強凸多面錐であって，π 自身は単体的ではないが π の自分自身以外のすべての面は単体的であると仮定する。小田と著者（1991年）はこのときに 1 次元凸多面錐を増やさないような π の準射影的な単体的細分が存在することを GKZ 分割を用いて証明した。しかし π の微小な単体的細分は必ずしも存在するとは限らない。

命題. π を偶数次元凸多面錐とする。もし π の準射影的かつ微小な単体的細分が存在するならば，その扇に対応する GKZ 凸多面錐と余次元 1 の面を共有する GKZ 凸多面錐に対応する扇は π の微小な単体的細分にはならない。

また，π の細分は凸多面体の細分と関係があるので，低次元凸多面体の分類を用いて 3 次元，4 次元の場合の微小な単体的細分の存在性に関する結果も得られる。

以上トーリック多様体の Chow 環とそれらの間の写像，そして GKZ 分割の応用などを述べたが，固有的な扇の写像であって余核が有限ではない場合の押し出し準同形の具体的な記述（例えば対角線埋め込みによって誘導される押し出し準同形）を組合せ論的に記述することは今後の課題である。

論文審査の結果の要旨

本論文は，トーリック多様体上の代数的サイクルに関する代数幾何学，とりわけChow環および双有理幾何学を，扇による組み合せ論的記述および直接証明によって研究し，数々の重要な新知見を得ている。

まず第1節でトーリック多様体に関する全般的定義を述べた後，第2節において単体的扇に対応するトーリック多様体のChow環を導入し，その基本的性質および石田のコホモロジーとの関連を述べている。

第3節では，トーリック多様体間の同変正則写像により誘導されるChow環の間の引き戻し準同型および押し出し準同型を，代数幾何学を使用せず扇の組み合わせ論により直接に定義し，かつ基本的性質の証明に到っている。第4節では，同変射影空間束及び同変ベクトル空間束の場合のChow環を扇の組み合わせ論により直接に計算している。Chern類の定義，強Lefschetz定理，交叉コホモロジー等に関連して今後重要な役割を果たすことが期待される。

第5節では，既存の概念をQ線形Gale変換という新しい概念に再構成することによって，トーリック多様体の幾何との関連付けに成功している。その事実を踏まえ，第6節においては，トーリック多様体の双有理幾何と線形Gale変換におけるGKZ分割との見事な対応付けに成功している。

第7節では，完備な場合にGKZ分割と森理論との関係を調べている。

第8節では，GKZ分割の応用として，トーリック孤立特異点解消の双有理幾何学に関する結果をいくつか得ている。

以上，本論文で得られている諸結果と，そのために編み出した数々の工夫はトーリック多様体の代数幾何学的研究および組み合せ論的研究に重要な寄与をしたものであり，著者が自立して研究活動を行うに必要な高度の研究能力およびその基礎となる豊かな学識を有することを示している。よって，朴恵淑提出の論文は博士（理学）の学位論文として合格と認める。